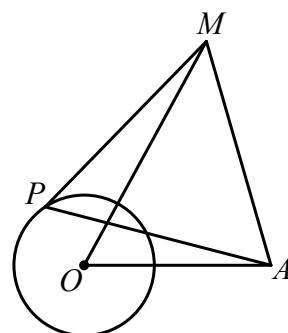


第2讲瓜豆原理与费马点问题加油站

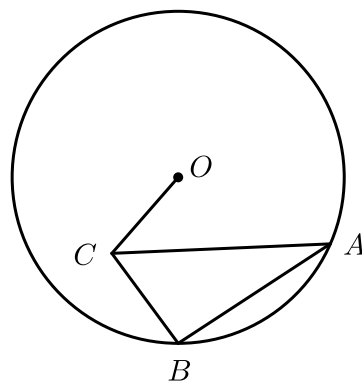
一、瓜豆原理

练习1

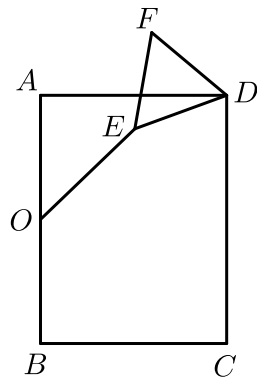
1. 如图，已知 $\odot O$ 的半径为3， $OA = 8$ ，点 P 为 $\odot O$ 上一动点，以 PA 为边作等边 $\triangle PAM$ ，则线段 OM 的长的最大值为（ ）。



- A. 14 B. 9 C. 12 D. 11
2. 如图， $\odot O$ 半径为3， $\triangle ABC$ 的顶点 A, B 在 $\odot O$ 上， $\angle B = 90^\circ$ ，点 C 在 $\odot O$ 内，且 $\angle A = 30^\circ$ ，当点 A 在圆上运动时， OC 的最小值为 _____。

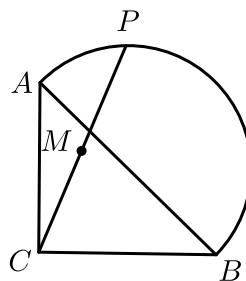


3. 如图，矩形 $ABCD$ 中， $AB = 2$ ， $AD = \sqrt{3}$ ， O 为 AB 的中点，将 OA 绕着点 O 旋转得到 OE ，连接 DE ．以 DE 为边作等边 $\triangle DEF$ （点 D 、 E 、 F 按顺时针方向排列），连接 CF ，则 CF 的最小值为_____．



练习2

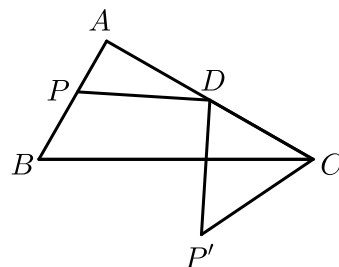
4. 如图，在等腰 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AC = BC = 2\sqrt{6}$ ，点 P 在以 AB 为直径的半圆上， M 为 PC 的中点．当点 P 沿半圆从点 A 运动至点 B 时，点 M 运动的路径长是（ ）．



- A. $\sqrt{2}\pi$ B. $\sqrt{3}\pi$ C. $2\sqrt{3}$ D. $\sqrt{6}$

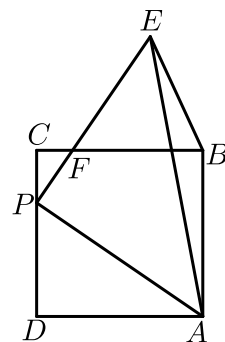
练习3

5. 如图所示，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $AB = 3$ ， $AC = 4$ ， D 为 AC 中点， P 为 AB 上的动点，将 P 绕点 D 逆时针旋转 90° 得到 P' ，连接 CP' ，则线段 CP' 的最小值为（ ）．

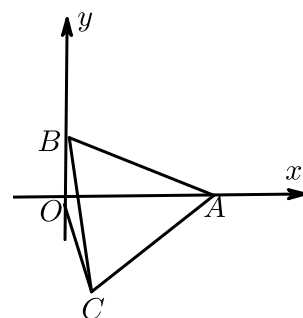


- A. 1.6 B. 2.4 C. 2 D. $2\sqrt{2}$

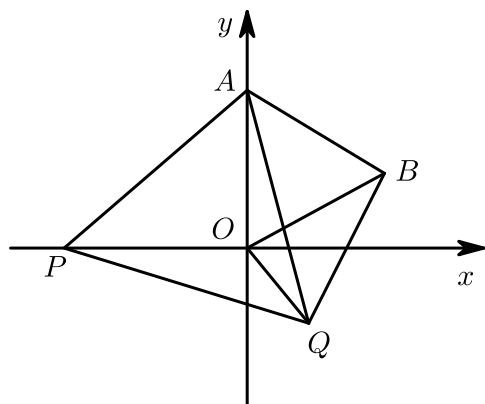
6. 如图，边长为8的正方形 $ABCD$ 中，动点 P 在 CD 边上，以 AP 为直角边向上作等腰 $\text{Rt}\triangle APE$ ，边 PE 与 BC 交于点 F ，连接 BE ，则线段 BE 在运动过程的最小值为 _____ ．



7. 如图，在平面直角坐标系中，已知点 $A(4, 0)$ ， B 为 y 轴正半轴一动点，连接 AB ，以 AB 为一边向下作等边 $\triangle ABC$ ，连接 OC ，则 OC 的最小值为 _____ ．

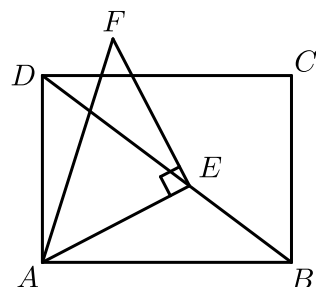


8. 如图，在平面直角坐标系中，已知点 $A(0, 2)$ ， $\triangle AOB$ 是等边三角形．点 P 是 x 轴上一动点，以线段 AP 为一边，在其右侧作等边 $\triangle APQ$ ．在点 P 的运动过程中， OQ 的最小值为 _____ ．

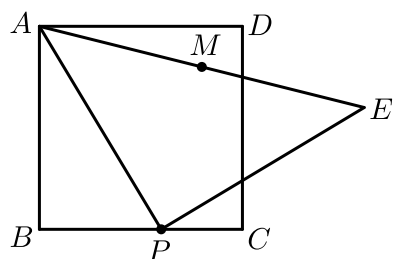


练习4

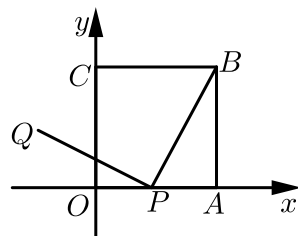
9. 矩形 $ABCD$ ， $AB = 4$ ， $AD = 3$ ，等腰 $\text{Rt}\triangle AEF$ 中， $AE = EF$ ， E 在 BD 上，当 E 从 B 运动到 D 时，点 F 的路径长为 _____ .



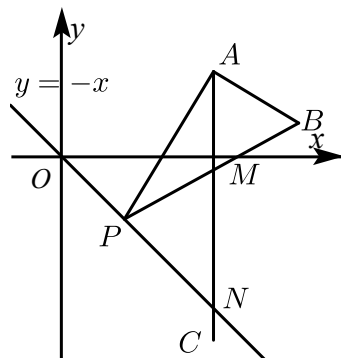
10. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为4，点 P 为 BC 边上一动点，以 AP 为直角边作等腰 $\text{Rt}\triangle APE$ ， M 为边 AE 的中点，当点 P 从点 B 运动到点 C ，则点 M 的运动路径长为 _____ .



11. 如图，在正方形 $OABC$ 中， A ， C 落在坐标轴上， $B(8,8)$ ， P 为 OA 上的一个动点， $BP \perp PQ$ ， $BP = PQ$ ，当点 P 从 A 运动到 $PA = 6$ 时，则点 Q 的运动路径长为 _____ .



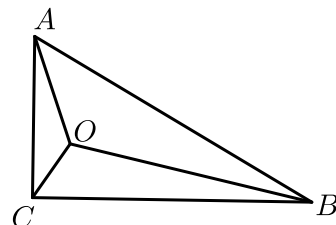
12. 如图，已知点 A 是第一象限内横坐标为 $2\sqrt{3}$ 的一个定点， $AC \perp x$ 轴于点 M ，交直线 $y = -x$ 于点 N ．若点 P 是线段 ON 上的一个动点， $\angle APB = 30^\circ$ ， $BA \perp PA$ ，则点 P 在线段 ON 上运动时， A 点不变， B 点随之运动．求当点 P 从点 O 运动到点 N 时，点 B 运动的路径长是 _____ .



二、费马点问题

练习5

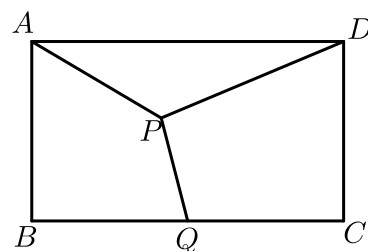
13. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 1$, $BC = \sqrt{3}$, 点 O 为 $\text{Rt}\triangle ABC$ 内一点, 连接 AO 、 BO 、 CO , 且 $\angle AOC = \angle COB = \angle BOA = 120^\circ$, 则 $OA + OB + OC =$ _____ .



14. 已知点 P 是 $\triangle ABC$ 内一点, 且它到三角形的三个顶点距离之和最小, 则 P 点叫 $\triangle ABC$ 的费马点 (Fermat point). 已经证明: 在三个内角均小于 120° 的 $\triangle ABC$ 中, 当 $\angle APB = \angle APC = \angle BPC = 120^\circ$ 时, P 就是 $\triangle ABC$ 的费马点. 若点 P 是腰长为 $\sqrt{2}$ 的等腰直角三角形 DEF 的费马点, 则 $PD + PE + PF =$ () .

A. $2\sqrt{3}$ B. $1 + \sqrt{3}$ C. 6 D. $3\sqrt{3}$

15. 如图所示, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 6$, $BC = 10$, P 是矩形内部一点, Q 是 BC 中点, 则 $PA + PD + PQ$ 的最小值为 _____ .



16. 小明遇到这样一个问题：如图1，正方形 $ABCD$ 是正方形，点 M 对角线 BD 上任意一点，连接 AM 、 CM ．当 $AM + BM + CM$ 的最小值为 $\sqrt{3} + 1$ 时，求正方形的边长．

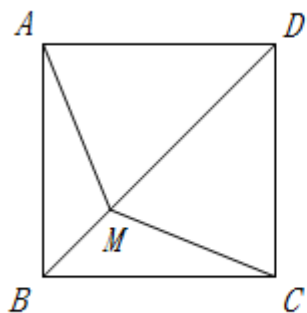


图1

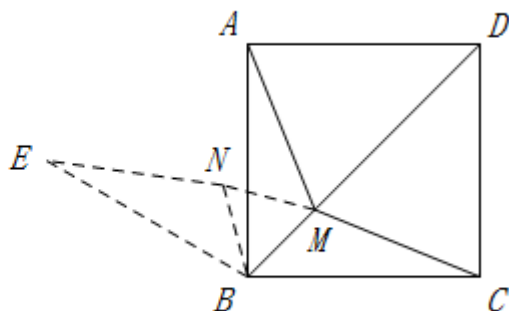


图2

小明是这样思考的：利用变换和等边三角形将边的位置重新组合．他的方法是以点 B 为旋转中心将 $\triangle ABM$ 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle EBN$ ，连接 MN ，此题可解，如图2．

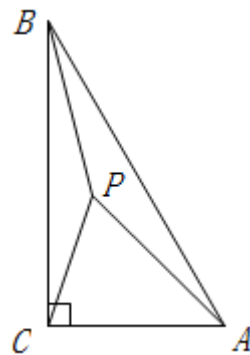
(1) 请你回答：

① 当点 M 在何处时， $AM + BM + CM$ 的值最小，并说明理由．

② 当 $AM + BM + CM$ 的最小值为 $\sqrt{3} + 1$ 时，求正方形的边长．

(2) 参考小明同学思考问题的方法，解决下列问题：

如图3，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ， $AC = 1$ ．点 P 为 $\text{Rt}\triangle ABC$ 内一点，连接 PA ， PB ， PC ，求 $PA + PB + PC$ 的最小值．



17. 回答下列各题：

(1) 阅读证明

①如图1，在 $\triangle ABC$ 所在平面上存在一点 P ，使它到三角形三顶点的距离之和最小，则称点 P 为 $\triangle ABC$ 的费马点，此时 $PA + PB + PC$ 的值为 $\triangle ABC$ 的费马距离．

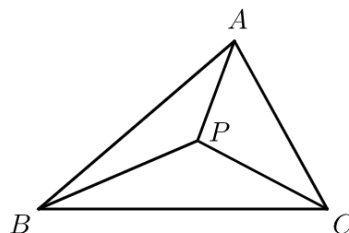


图1

②如图2，已知点 P 为等边 $\triangle ABC$ 外接圆的 $\widehat{BC}$ 上任意一点．求证： $PB + PC = PA$ ．

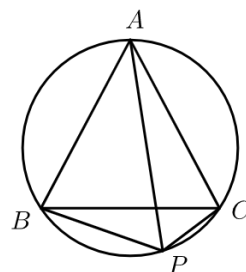


图2

(2) 知识迁移

根据(1)的结论，我们有如下探寻 $\triangle ABC$ (其中 $\angle A, \angle B, \angle C$ 均小于 120°)的费马点和费马距离的方法：

第一步：如图3，在 $\triangle ABC$ 的外部以 BC 为边长作等边 $\triangle BCD$ 及其外接圆；

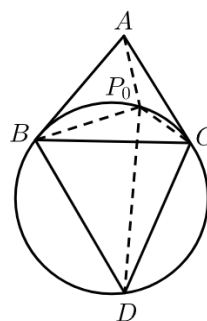


图3

第二步：在 $\widehat{BC}$ 上取一点 P_0 ，连接 P_0A, P_0B, P_0C, P_0D ．易知

$P_0A + P_0B + P_0C = P_0A + (P_0B + P_0C) = P_0A + \underline{\hspace{2cm}}$ ；

第三步：根据(1)①中定义，在图3中找出 $\triangle ABC$ 的费马点 P ，线段 $\underline{\hspace{2cm}}$ 的长度即为 $\triangle ABC$ 的费马距离．

(3) 知识应用

已知三村庄 A ， B ， C 构成了如图4所示的 $\triangle ABC$ (其中 $\angle A$ ， $\angle B$ ， $\angle C$ 均小于 120°)，现选取一点 P 打水井，使水井 P 到三村庄 A ， B ， C 所铺设的输水管总长度最小．求输水管总长度的最小值．

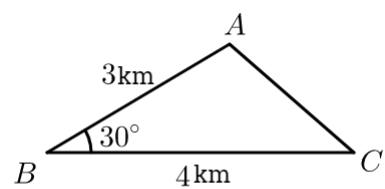


图4